

Applications - Chapitre 10

Système de masse variable et référentiels accélérés



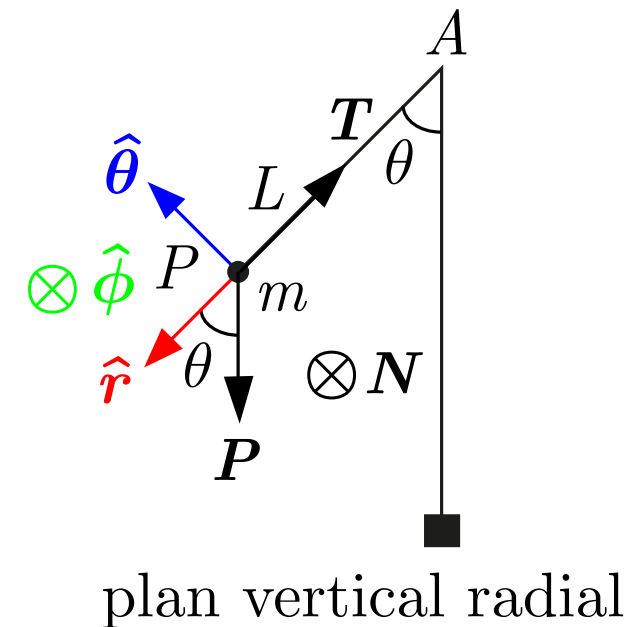
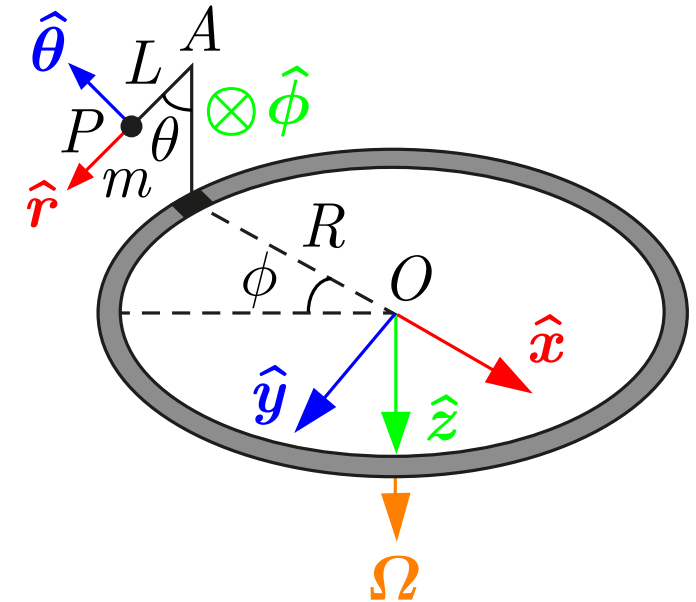
A.10.1 Pendule sur train en mouvement circulaire

A.10.2 Poids apparent d'une chaînette qui tombe

A.10.1 Pendule sur train en mouvement circulaire

A.10.2 Poids apparent d'une chaînette qui tombe

- Un pendule P de masse m et de longueur L est suspendu au plafond A d'un train en mouvement circulaire de rayon uniforme R à vitesse angulaire $\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
 - Un mécanisme assure que le pendule oscille dans le plan vertical radial orthogonal au mouvement contenant O et A .
 - Soit ϕ l'angle azimutal dans le plan horizontal des rails et θ l'angle d'oscillation nodal dans le plan vertical radial.
- 1 Référentiel absolu : rails
repère cartésien $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$
 - 2 Référentiel relatif : train
repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$



- Grandeurs cinématiques relatives :

- 1 Position relative :

$$\mathbf{r}_r(P) = L \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10.1})$$

- 2 Vitesse relative :

$$\mathbf{v}_r(P) = L \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.10.2})$$

- 3 Accélération relative :

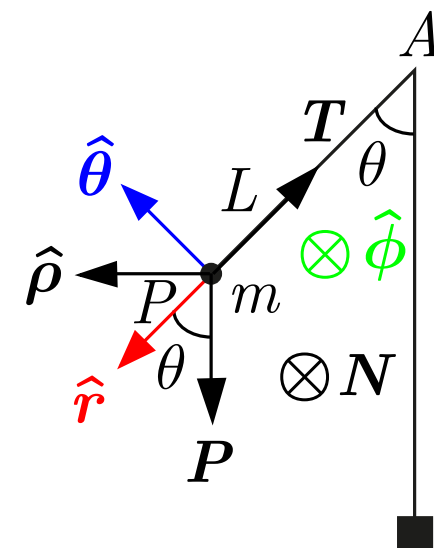
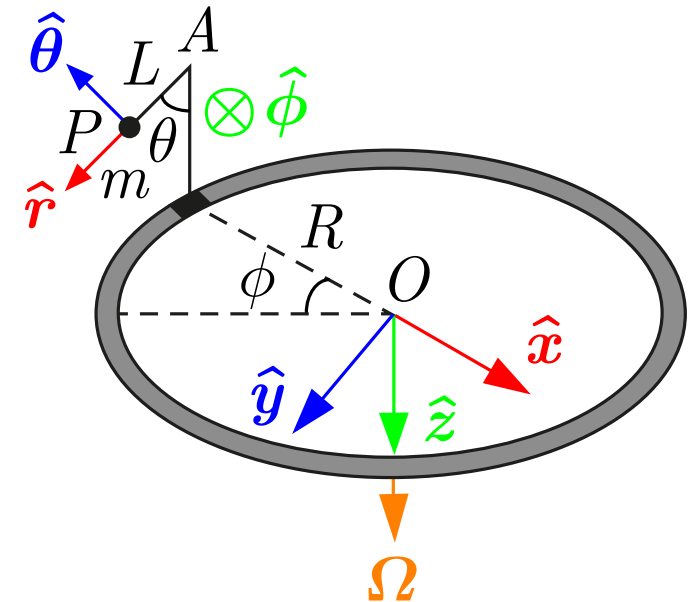
$$\mathbf{a}_r(P) = -L \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + L \ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (\text{A.10.3})$$

- Vitesse angulaire :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}} = \Omega (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (\text{A.10.4})$$

- Accélération absolue : point A - MCU

$$\mathbf{a}_a(A) = -R \dot{\phi}^2 \hat{\boldsymbol{\rho}} = -R \Omega^2 (\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$$



plan vertical radial

- Forces extérieures :

- 1 Poids :

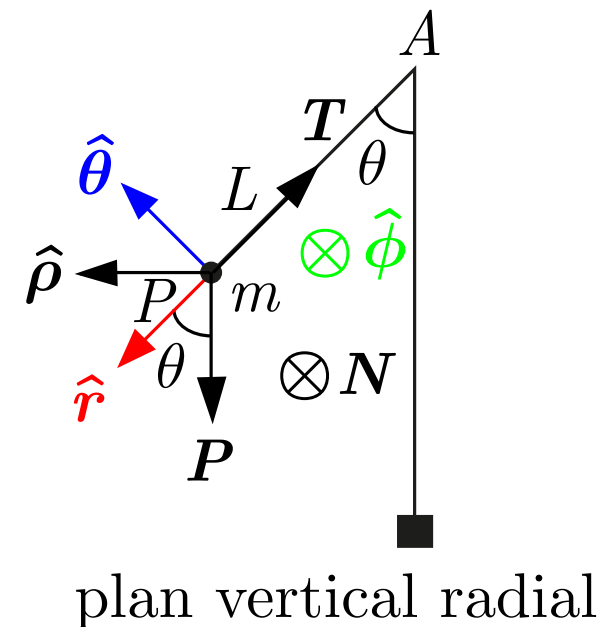
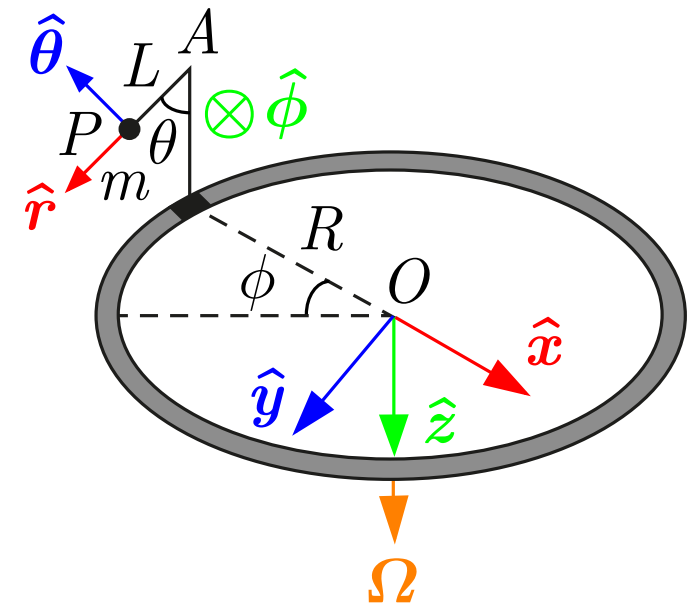
$$\mathbf{P} = mg \left(\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (\text{A.10.5})$$

- 2 Force de réaction normale :

$$\mathbf{N} = N \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.10.6})$$

- 3 Tension :

$$\mathbf{T} = -T \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10.7})$$



- Forces d'inertie : $\dot{\Omega} = 0$

- Force inertielle :

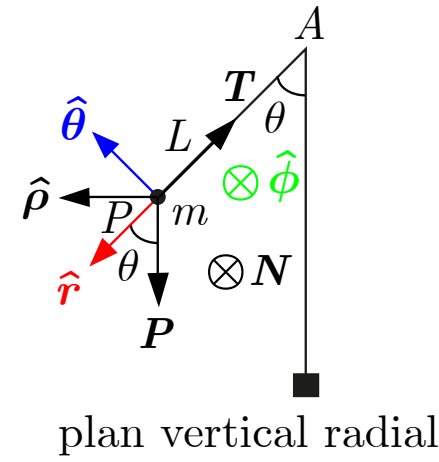
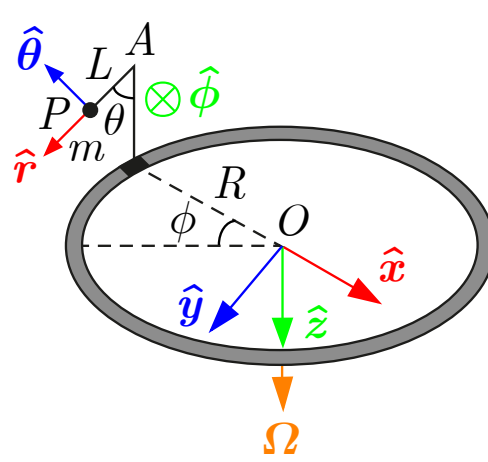
$$\mathbf{F}_i = -m \mathbf{a}_a(A) = m R \Omega^2 \hat{\rho} = m R \Omega^2 (\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (\text{A.10.8})$$

- Force centrifuge :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -m L \Omega^2 \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}) \\ &= -m L \Omega^2 (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times ((\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \\ &= -m L \Omega^2 \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= m L \Omega^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = m L \Omega^2 \sin \theta \hat{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.10.9})$$

- Force de Coriolis :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C &= -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m L \dot{\theta} \Omega (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -2m L \dot{\theta} \Omega \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{A.10.10})$$



- Loi du mouvement relatif : (A.10.11)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P)$$

- Equations du mouvement relatif :

$$\text{selon } \hat{\mathbf{r}} : mg \cos \theta - T + m(R + L \sin \theta) \Omega^2 \sin \theta = -m L \dot{\theta}^2 \quad (\text{A.10.12})$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : -mg \sin \theta + m(R + L \sin \theta) \Omega^2 \cos \theta = m L \ddot{\theta} \quad (\text{A.10.13})$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : N - 2m L \dot{\theta} \Omega \cos \theta = 0 \quad (\text{A.10.14})$$

- Tension : (A.10.12) $\Rightarrow$

$$\mathbf{T} = -m \left(g \cos \theta + L \dot{\theta}^2 + (R + L \sin \theta) \Omega^2 \sin \theta \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{A.10.15})$$

- Force de réaction normale : (A.10.14) $\Rightarrow$

$$\mathbf{N} = 2mL\dot{\theta}\Omega \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{A.10.16})$$

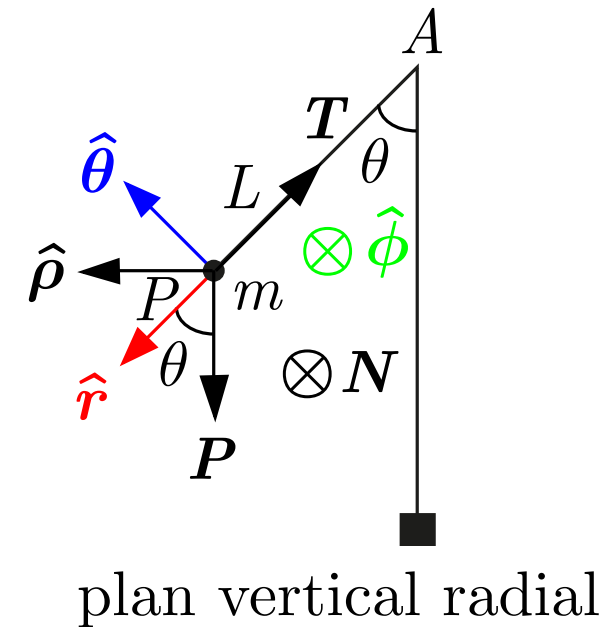
- Equation du mouvement : (A.10.17)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta - \left(\frac{R}{L} + \sin \theta \right) \Omega^2 \cos \theta = 0$$

- Position d'équilibre :

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 \quad (\text{A.10.18})$$

$$\Rightarrow \tan \theta_0 = (R + L \sin \theta_0) \frac{\Omega^2}{g} \quad (\text{A.10.19})$$



- Approximation : $R \gg L$ (A.10.20)

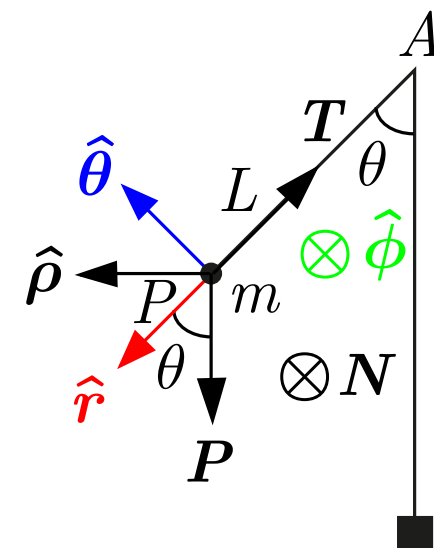
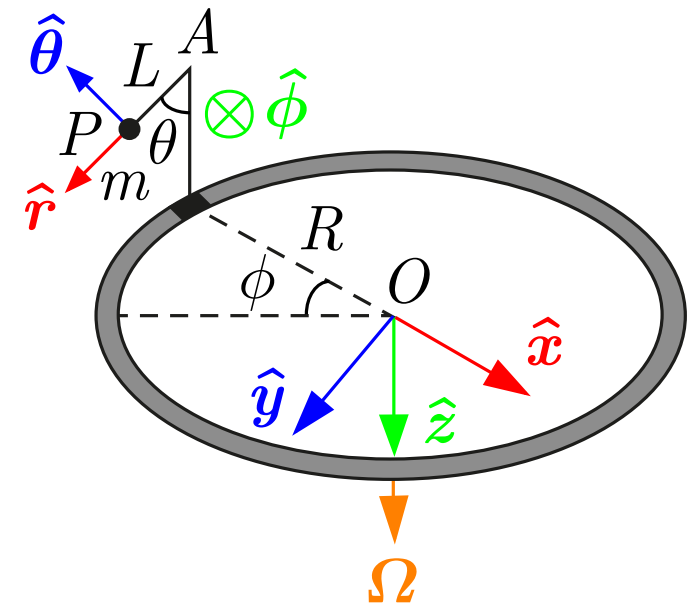
$$R + L \sin \theta_0 = R \left(1 + \frac{L}{R} \sin \theta_0 \right) \simeq R$$

- Position d'équilibre approximée :

$$\tan \theta_0 = \frac{R \Omega^2}{g} = \frac{\| \mathbf{a}_a(A) \|}{g} \quad (\text{A.10.21})$$

- Equation du mouvement approximée :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta - \frac{R \Omega^2}{L} \cos \theta = 0 \quad (\text{A.10.22})$$



plan vertical radial

A.10.1 Pendule sur train en mouvement circulaire

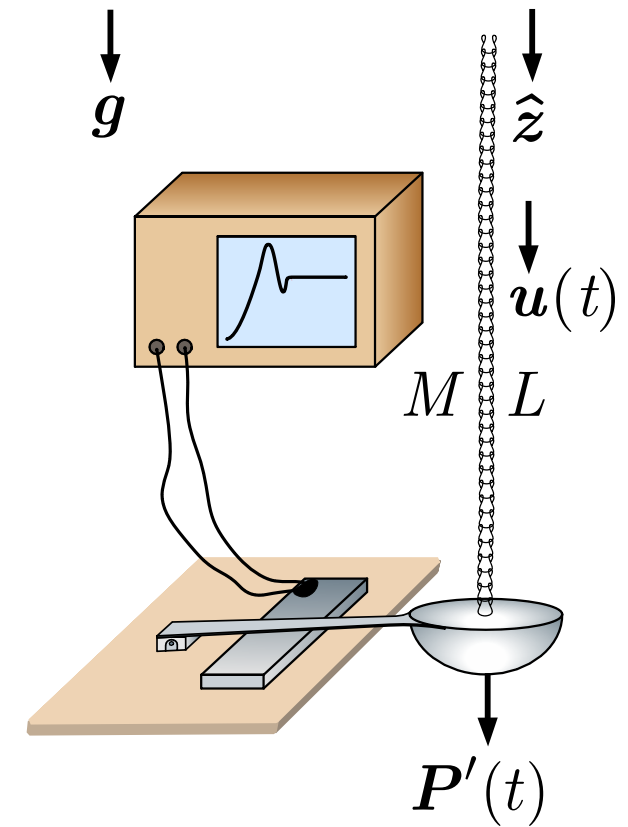
A.10.2 Poids apparent d'une chaînette qui tombe

- Une chaînette de masse M et de longueur L tombe en chute libre à vitesse $\mathbf{u}(t) = gt \hat{\mathbf{z}}$ dans un réceptacle relié à un capteur de force durant un temps de chute T .
- Le capteur de force mesure la force résultante $\mathbf{P}'(t) = m(t) \mathbf{a}(t)$ correspondant au poids apparent de la chaînette.
- Le poids apparent $\mathbf{P}'(t)$ de la chaînette est la somme du poids réel $\mathbf{P}(t) = m(t) \mathbf{g}$ dans le réceptacle et de la poussée due au débit de masse $\dot{m}(t) > 0$ entrant à vitesse $\mathbf{u}(t)$.
- Chaînette homogène : densité linéique constante

$$\rho_\ell = \frac{dm}{dz} = \frac{M}{L} = \text{cste} \quad (\text{A.10.23})$$

- Débit de masse : densité linéique constante et vitesse linéaire $\dot{z} = gt$

$$\dot{m}(z(t)) = \frac{dm}{dz} \dot{z} = \frac{M}{L} gt \quad (\text{A.10.24})$$



- Débit de masse :

$$\dot{m}(t) = \frac{M}{L} g t \quad (A.10.24)$$

- Temps de chute : extrémité supérieure

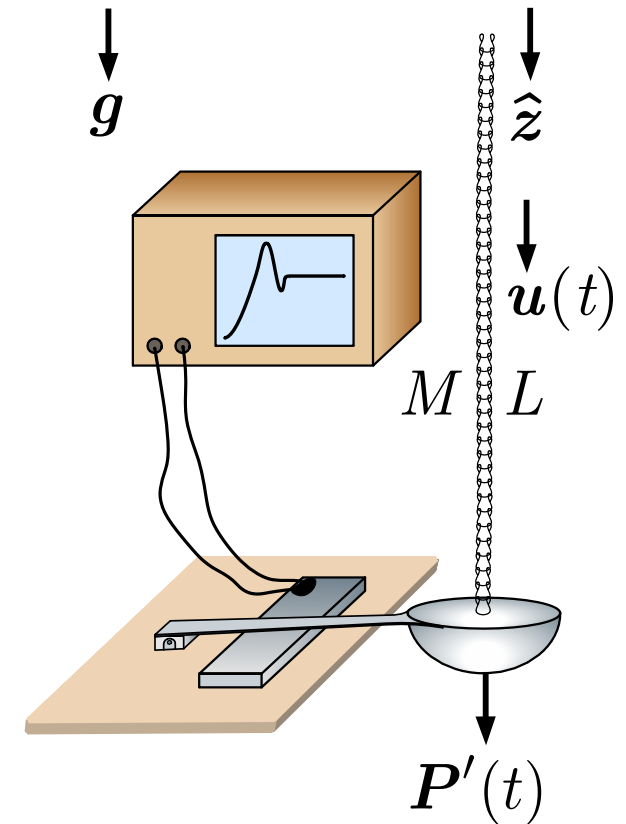
$$L = \frac{1}{2} g T^2 \quad \text{ainsi} \quad T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \quad (A.10.25)$$

- Débit de masse : (A.10.24) et (A.10.25)

$$\dot{m}(t) = \frac{2M}{T^2} t \quad (A.10.26)$$

- Masse : $m(0) = 0$ et $m(T) = M$ (A.10.27)

$$m(t) = \int_{m(0)}^{m(t)} dm'(t') = \int_0^t \dot{m}(t') dt' = \frac{2M}{T^2} \int_0^t t' dt' = \frac{M}{T^2} t^2$$



- Loi du mouvement : masse variable (A.10.28)

$$\mathbf{F}^{\text{ext}}(t) + \dot{m}(t) \mathbf{u}(t) = m(t) \mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{P}'(t)$$

- Force extérieure : poids réel (A.10.29)

$$\mathbf{F}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{P}(t) = m(t) \mathbf{g} = \left(\frac{M}{T^2} t^2 \right) (g \hat{\mathbf{z}})$$

- Poussée : (A.10.30)

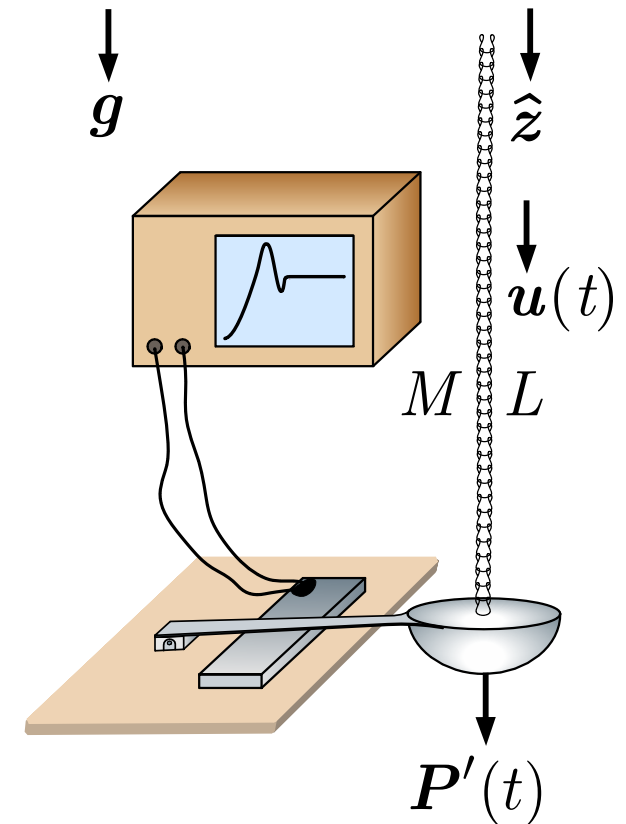
$$\dot{m}(t) \mathbf{u}(t) = \left(\frac{2M}{T^2} t \right) (gt \hat{\mathbf{z}})$$

- Poids apparent :

$$\mathbf{P}'(t) = m(t) \mathbf{g} + \dot{m}(t) \mathbf{u}(t) \quad (\text{A.10.31})$$

- Poids apparent : projection selon l'axe vertical

$$P'(t) = \left(\frac{M}{T^2} t^2 \right) g + \left(\frac{2M}{T^2} t \right) (gt) = \frac{3Mg}{T^2} t^2 \quad (\text{A.10.32})$$



- Poids apparent durant la chute : $0 < t < T$

$$P'(t) = \underbrace{\frac{Mg}{T^2} t^2}_{\text{poids réel}} + \underbrace{\frac{2Mg}{T^2} t^2}_{\text{poussée}} \quad (\text{A.10.32})$$

